УДК 539.3

РЕШЕНИЕ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛОСЫ С ПОМОЩЬЮ ДИАГОНАЛИЗОВАННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ

В.М. Замятин, А.В. Махов, А.А. Светашков

Томский политехнический университет, г. Томск
E-mail: alexmakhov@mail.ru

Приведена постановка и схема реализации нового метода решения плоских задач теории упругости, основанного на диагонализации системы уравнений равновесия. Получены аналитические решения трех плоских задач в напряжениях для нагружения полосы сложной нагрузкой.

Введение

При решении двумерных задач теории упругости [1–4], возникает проблема отыскания двух неизвестных функций (перемещений u, v в направлении координатных осей OX, OY которые удовлетворяют системе двух дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка – системе уравнений равновесия в форме Ляме [1]. Кроме того, искомые перемещения должны удовлетворять заданным условиям на граничном контуре. В классической постановке задачи теории упругости в напряжениях граничные условия относительно искомых перемещений так же, как и уравнения равновесия, образуют систему двух дифференциальных уравнений в частных производных (в отличие от системы уравнений равновесия система граничных условий имеет первый порядок).

Для решения плоских задач теории упругости предлагается использовать метод, основанный на преобразовании системы уравнений равновесия к диагональному виду [5, 6]. Очевидно, что при таком подходе к отысканию решения появляются некоторые преимущества, облегчающие процедуру интегрирования уравнений равновесия и удовлетворения граничным условиям. Данные преимущества можно использовать как в процессе построения аналитических решений, так и при численной реализации с помощью конечно-разностного, конечно-элементного и других методов. В настоящей работе применяется аналитический метод; результаты сопоставляются с известными решениями, полученными с помощью функции напряжений.

1. Постановка плоской задачи теории упругости для диагонализованной системы уравнений равновесия и схема решения

Рассмотрим основные элементы предлагаемой модификации постановки плоской задачи, основанной на диагонализации системы уравнений равновесия в форме Ляме.

а) Уравнения равновесия в области

Вместо отыскания пары функций $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$, удовлетворяющих системе уравнений равновесия Ляме, модифицированная постановка предполагает решение двух гармонических уравнений:

$$\Delta\theta = 0, \quad (1)$$

$$\Delta\kappa = 0. \quad (2)$$

Здесь θ – объемная деформация, которая выражается через перемещения согласно

$$\theta = d_1 u + d_2 v,$$

$$d_1 \equiv \frac{\partial}{\partial x},\ d_2 \equiv \frac{\partial}{\partial y},$$

где κ – произвольная гармоническая функция, Δ – оператор Лапласа

$$\Delta = d_1^2 + d_2^2,$$

$$d_1^{\,2} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2},\ d_2^{\,2} \equiv \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

б) Граничные условия.

Для пары новых искомых функций $\theta=\theta(x,y)$, $\kappa=\kappa(x,y)$ граничные условия преобразуются в условия вида:

$$\sigma_x l + \tau_{xy} m = X_n,$$
$$\sigma_y m + \tau_{xy} l = Y_n, \quad (3)$$

где X_n, Y_n – компоненты объемных сил, σ_x, σ_y, τ_{xy} – напряжения; l, m – направляющие косинусы нормали к граничному контуру, имеющему дугу s:

$$l = \cos(n,x) = \frac{dy}{ds},\ m = \cos(n,y) = -\frac{dx}{ds}.$$

в) Функции, гармонически-сопряженные .

Кроме $\theta=\theta(x,y)$ и $\kappa=\kappa(x,y)$, для расчета компонент напряженно-деформированного состояния необходимо задание еще одной пары функций, удовлетворяющих системе Коши-Римана

$$d_1\theta = \alpha d_2\omega,\ d_2\theta = -\alpha d_1\omega. \quad (4)$$

Здесь $\alpha = \frac{2\lambda}{1+\lambda}$, ω – компонента вектора вращения

$$\omega = \frac{1}{2}(d_1 v - d_2 u).$$

Исходя из соотношений (4), функцию $\alpha\omega(x,y)$, гармонически-сопряженную $\theta(x,y)$, можно определить в любой точке расчетной области согласно

$$\alpha\omega(x,y) = \int_0^{(x,y)} (-d_2\theta(x,y)\,dx + d_1\theta(x,y)\,dy) + C_1, \quad (5)$$

где C_1 – константа.

Аналогично можно найти функцию $\chi=\chi(x,y)$, гармонически-сопряженную $\kappa(x,y)$:

$$d_1\kappa = -d_2\chi, \ \ d_2\kappa = d_1\chi, \qquad (6)$$

и, таким образом, $\chi(x,y)$ в любой точке расчетной области:

$$\chi(x,y) = \int_0^{(x,y)} (d_2\kappa\, dx - d_1\kappa\, dy) + C_2, \qquad (7)$$

где C_2 – константа. Далее будем использовать значения C_1, C_2 равные нулю.

г) Формулы для компонент напряженно-деформированного состояния.

По найденным из решения двух краевых задач типа Дирихле функциям θ, κ и по определению функций $\alpha\omega$ и χ, гармонически-сопряженных θ, κ, можно рассчитать напряжения в расчетной области:

$$\sigma_x = \theta - \frac{1}{2}[x\, d_1\theta - y\, d_2\theta] + \kappa,$$

$$\sigma_y = \theta + \frac{1}{2}[x\, d_1\theta - y\, d_2\theta] - \kappa,$$

$$\tau_{xy} = -\frac{1}{2}[x\, d_2\theta + y\, d_1\theta] + \chi. \qquad (8)$$

Перемещения u, v упругого тела можно рассчитать по напряжениям (8), пользуясь стандартными соотношениями [2].

Таким образом, реализация модифицированной постановки плоской задачи теории упругости, определяемая соотношениями (1–8), имеет некоторые отличия от классической постановки. Основное преимущество предлагаемой модификации заключаются в том, что уравнения равновесия имеют диагональный вид (1, 2). Действительно, уравнения (1, 2) представляют собой дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка, а не систему уравнений равновесия в форме Ляме.

Для иллюстрации метода рассмотрим следующие задачи.

2. Нагружение пластины сложной нагрузкой

Пластина размером h, b подвергается действию напряжений, эпюры которых представлены на рис. 1.

Для решения необходимо записать аналитические выражения граничных напряжений. Сначала получим вид функции $Y_n(x,y)$.

а) Рассмотрим граничные значения σ_y на верхней и нижней гранях, обозначив их через σ_y^a:

$$\text{при} \quad y = \frac{h}{2} \quad \sigma_y^a = \frac{1}{4}a\,h^3 = 2\,a\left(\frac{h}{2}\right)^3, \ m = 1;$$

$$\text{при} \quad y = -\frac{h}{2} \quad \sigma_y^a = -\frac{1}{4}a\,h^3 = -2\,a\left(\frac{h}{2}\right)^3, \ m = -1.$$

Здесь a=const.

Объединяя два последних выражения, получим

$$\sigma_y^a = 2\,a\,y^3 m\Big|_{y=\pm\frac{h}{2}}.$$

б) Рассмотрим вклад $Y_n(x,y)$ в касательных напряжений на правом торце. Согласно эпюре граничного τ_{xy} имеем:

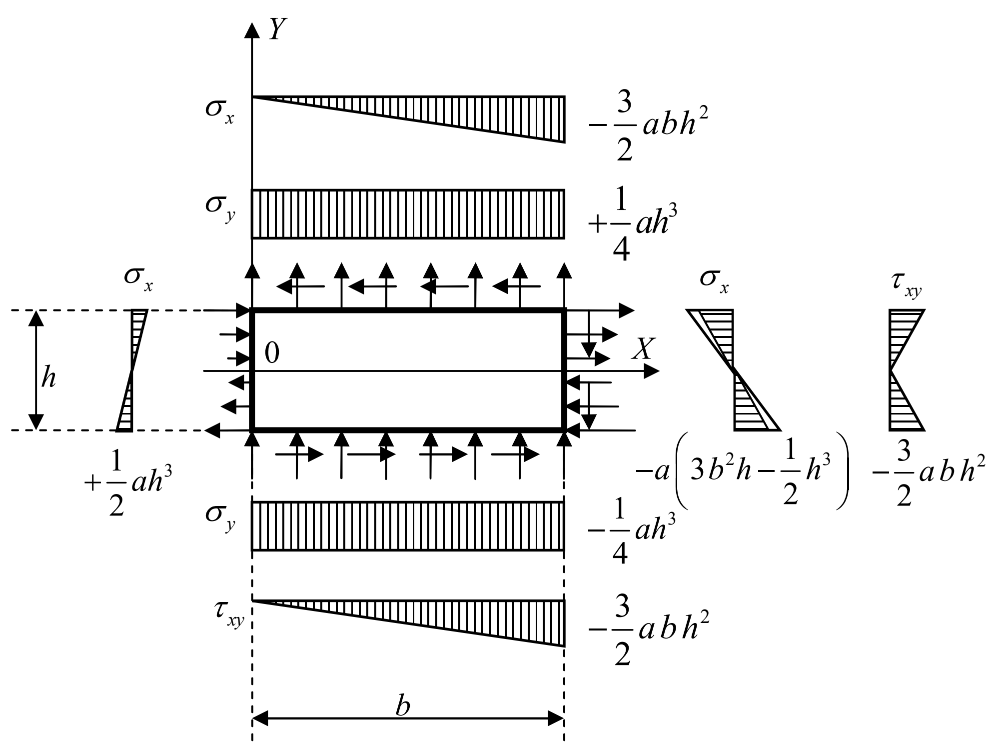


Рис 1. *Эпюры нагружения пластины сложной нагрузкой*

при $y = \frac{h}{2}$ $\tau_{xy} = -\frac{3}{2} a b h^2 = -6 a b \left(\frac{h}{2}\right)^2$;

при $y = -\frac{h}{2}$ $\tau_{xy} = -\frac{3}{2} a b h^2 = -6 a b \left(\frac{h}{2}\right)^2$;

при $y = 0$ $\tau_{xy} = 0$.

Значит, зависимость τ_{xy} от по торцу выражается:

$$\tau_{xy} = -6 a b y^2.$$

Далее учтем изменение τ_{xy} от левого торца к правому. Поскольку на левом торце (x=0, l=–1) τ_{xy}=0, а на правом (x=b, l=1), τ_{xy}=–6aby^2, то получаем:

$$\tau_{xy} = -6 a x y^2.$$

Таким образом, функция Y_n имеет вид:

$$Y_n = a(2 y^3 m - 6 x y^2 l).$$

Аналогичным образом рассчитывается аналитическое выражение для X_n:

$$X_n(x, y) = a[(6x^2 y - 4y^3)l - 6xy^2 m].$$

Зададимся функциями $\theta(x,y)$ и $\kappa(x,y)$ вида:

$$\theta(x, y) = A(3x^2 y - y^3), \tag{9}$$

$$\kappa(x, y) = B(3x^2 y - y^3), \tag{10}$$

где A и B – неизвестные константы, которые необходимо найти. Функции (9, 10) соответственно удовлетворяют условиям (1, 2), то есть являются гармоническими.

Функция $\chi(x,y)$ определяется из (10) с помощью (7) (для упрощения записи здесь и далее, координаты x,y будем опускать):

$$\chi = B(x^3 - 3xy^2). \tag{11}$$

Данная функция тоже является гармонической.

С учетом (9–11) распишем напряжения (8):

$$\sigma_x = \left(\frac{3}{2}A + 3B\right)x^2 y - \left(\frac{5}{2}A + B\right)y^3,$$

$$\sigma_y = \left(\frac{9}{2}A - 3B\right)x^2 y + \left(\frac{1}{2}A + B\right)y^3,$$

$$\tau_{xy} = \left(-\frac{3}{2}A - 3B\right)xy^2 + \left(-\frac{3}{2}A + B\right)x^3. \tag{12}$$

Рассмотрим левую границу пластины, x=0. Здесь l=–1, m=0, соответственно

$$X_n = 4 a y^3,$$

$$Y_n = 0, \tag{13}$$

а граничные условия (3) преобразуются так:

$$-\sigma_x = X_n,$$

$$-\tau_{xy} = Y_n. \tag{14}$$

Подставляя в (14) функции из (12) и (13) и решая полученные уравнения, получаем, что

$$B = 4a - \frac{5}{2}A. \tag{15}$$

Учитывая (15), напряжения (12) будут иметь следующий вид:

$$\sigma_x = (-6A + 12a)x^2 y - 4 a y^3,$$

$$\sigma_y = (12A - 12a)x^2 y + (-2A + 4a)y^3,$$

$$\tau_{xy} = (-9A - 12a)xy^2 + (-4A + 4a)x^3. \tag{16}$$

Теперь рассмотрим правую границу пластины, x=b. Здесь l=1, m=0, соответственно

$$X_n = a(6b^2 - 4y^3),$$

$$Y_n = -6 a b y^2, \tag{17}$$

а граничные условия (3) будут выглядеть так:

$$\sigma_x = X_n,$$

$$\tau_{xy} = Y_n. \tag{18}$$

Подставляя в (18) функции из (16) и (17) и решая полученные уравнения, получаем, что

$$A = a, \tag{19}$$

далее, по (15) с учётом (19) определяем, что

$$B = \frac{3}{2}a. \tag{20}$$

Таким образом, обе неизвестные константы найдены. Расписывая (9, 10) с учётом (19, 20), получаем, что θ и κ имеют вид:

$$\theta = a(3x^2 y - y^3),$$

$$\kappa = \frac{3}{2}a(3x^2 y - y^3). \tag{21}$$

Теперь определены все функции, необходимые для нахождения напряжений. Подставляя функции (21) в (8), получаем:

$$\sigma_x(x, y) = 6 a x^2 y - 4 a y^3,$$

$$\sigma_y(x, y) = 2 a y^3,$$

$$\tau_{xy}(x, y) = -6 a x y^2. \tag{22}$$

Сравним полученное решение с классическим, которое можно рассчитать с помощью функции напряжений. Для данной задачи функция напряжений выглядит следующим образом [4]:

$$\varphi = a\left(x^2 y^3 - \frac{y^5}{5}\right),$$

соответственно, напряжения будут следующие:

$$\sigma_x = d_2^2\varphi = 6 a x^2 y - 4 a y^3,$$

$$\sigma_y = d_1^2\varphi = 2 a y^3,$$

$$\tau_{xy} = -d_1 d_2 \varphi = -6 a x y^2. \tag{23}$$

Видно, что соответствующие функции в (22) и в (23) попарно совпадают.

3. Нагружение пластины, силами, распределенными по линейному закону

Пластина размером h, b подвергается действию напряжений, эпюры которых представлены на

рис. 2. Аналогично предыдущей задаче определяется, что нагрузка в функции координат имеет вид:

$$X_n(x,y)=0,\ \ Y_n(x,y)=6axm.$$

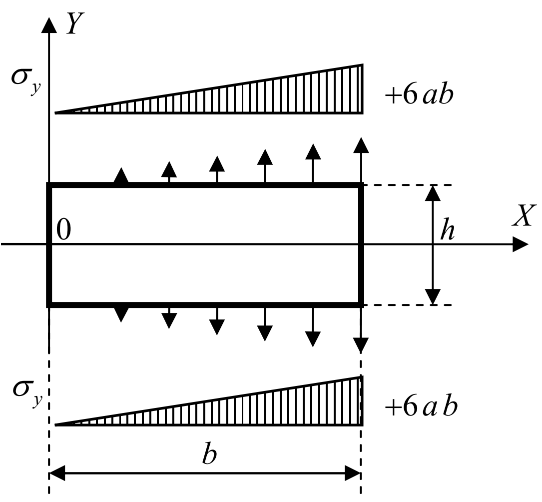


Рис. 2. *Эпюры нагружения пластины силами, распределенными по линейному закону*

Для решения данной задачи зададимся гармоническими функциями θ и κ в виде:

$$\theta = Ax+By,$$

$$\kappa = Cx+Dy, \qquad (24)$$

где A, B, C, D – константы, которые будет необходимо найти. По (7) находим, что

$$\chi = Dx-Cy. \qquad (25)$$

Все три функции, как легко показать, являются гармоническими.

Используя (8) получаем следующий вид для напряжений:

$$\sigma_x = x\left(\frac{1}{2}A+C\right)+y\left(\frac{3}{2}B+D\right),$$

$$\sigma_y = x\left(\frac{3}{2}A-C\right)+y\left(\frac{1}{2}B-D\right),$$

$$\tau_{xy} = x\left(-\frac{1}{2}B+D\right)+y\left(-\frac{1}{2}A-C\right). \qquad (26)$$

Рассмотрим левую границу пластины. Для этой границы x=0, l=–1, m=0. С учётом этого, из (3) получаем:

$$\sigma_x = 0, \qquad (27)$$

$$\tau_{xy} = 0, \qquad (28)$$

при этом, учитывая (26) на рассматриваемой границе, σ_x и τ_{xy} принимают вид:

$$\sigma_x = y\left(\frac{3}{2}B+D\right), \qquad (29)$$

$$\tau_{xy} = y\left(-\frac{1}{2}A-C\right). \qquad (30)$$

Объединяя (27) с (29) и (28) с (30), получаем, что

$$D=-\frac{3}{2}B,\ C=-\frac{1}{2}A, \qquad (31)$$

и, с учётом этого, функции из (26) принимают следующий вид

$$\sigma_x = 0,$$

$$\sigma_y = 2Ax+2By,$$

$$\tau_{xy} = -2Bx. \qquad (32)$$

Теперь рассмотрим верхнюю границу пластины. Для этой границы $y=\frac{b}{2}$, $l=0$, $m=1$, а функции (3) имеют следующий вид:

$$\sigma_y = 6ax, \qquad (33)$$

$$\tau_{xy} = 0, \qquad (34)$$

при этом, учитывая (32),

$$\sigma_y = 2Ax+2B\frac{b}{2}, \qquad (35)$$

$$\tau_{xy} = -2Bx. \qquad (36)$$

Объединяя (34) и (36), получаем, что B=0, и, учитывая это при объединении (33) и (35), получаем, что A=3a.

Из (31) теперь находим, что $C=-\frac{3}{2}a, D=0.$

Подставляя значения найденных констант в (32), находим, что

$$\sigma_x = 0,$$

$$\sigma_y = 6ax,$$

$$\tau_{xy} = 0. \qquad (37)$$

Сравним полученное решение с классическим. В задаче для треугольной нагрузки бигармоническая функция напряжений имеет вид $\varphi=ax^3$ соответственно, напряжения будут следующие:

$$\sigma_x(x,y) = d_2{}^2\varphi = d_2{}^2(ax^3)=0,$$

$$\sigma_y(x,y) = d_1{}^2\varphi = d_1{}^2(ax^3)=d_1(3ax^2)=6ax,$$

$$\tau_{xy}(x,y) = -d_1d_2\varphi = -d_1d_2(ax^3)=0. \qquad (38)$$

Таким образом, напряжения, рассчитанные по (37, 38), совпадают между собой.

4. Расчёт плотины треугольного профиля

Плотина, подвергающаяся нагрузке от давления воды, имеет треугольное сечение, как показано на рис. 3. Способом, использованным в предыдущих двух задачах, определяется, что нагрузка в функции координат имеет вид:

$$X_n(x,y)=\gamma\, y\, l+\gamma\, \mathrm{tg}^2(\alpha)\, x\, m,$$

$$Y_n(x,y)=(-2\gamma\,\mathrm{tg}^2(\alpha)\,x-\gamma\,\mathrm{tg}^2(\alpha)\,y)\,m+\gamma\,\mathrm{tg}^2(\alpha)\,x\,l.$$

Здесь a=const, γ=const.

Как и в предыдущей задаче, зададимся гармоническими функциями θ и κ в виде (24). Функция χ в этом случае будет иметь вид (25), а напряжения – (26). Как и в предыдущем случае, необходимо найти значения констант A, *B*, *C*, *D*.

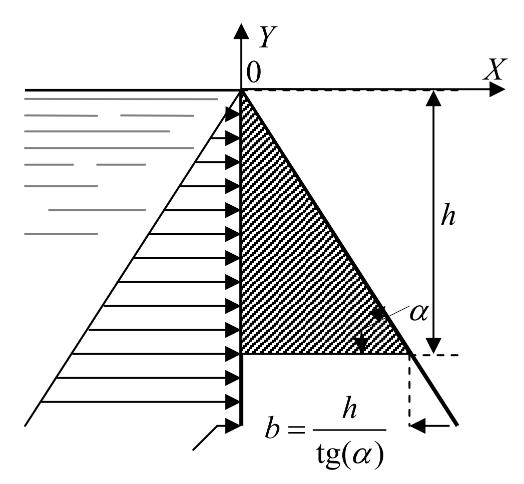


Рис. 3. *Эпюры нагружения плотины*

Рассмотрим вертикальную поверхность (левую границу) плотины. Для этой границы x=0, l=–1, m=0. Из (3) определяем, что

$$\sigma_x = \gamma y, \qquad (39)$$

$$\tau_{xy} = 0, \qquad (40)$$

при этом, σ_x и τ_{xy} на рассматриваемой границе, принимают вид (29, 30). Объединяя попарно (39) с (29) и (40) с (30), получаем, что

$$D = \gamma - \frac{3}{2}B,\ C = -\frac{1}{2}A, \qquad (41)$$

и, с учётом этого, функции из (26) принимают следующий вид

$$\sigma_x = \gamma y,$$
$$\sigma_y = 2Ax + y(2B-\gamma),$$
$$\tau_{xy} = x(-2B+\gamma). \qquad (42)$$

Теперь рассмотрим наклонную поверхность (правую границу) плотины. Для этой границы распишем: $x=-y\text{ctg}(\alpha)$, $l=\sin(\alpha)$, $m=\cos(\alpha)$. Компоненты объемных сил X_n и Y_n здесь равны нулю. С учетом этого, граничные условия в форме Коши будут иметь следующий вид:

$$\sigma_x \sin(\alpha) + \tau_{xy}\cos(\alpha) = 0,$$
$$\sigma_y \cos(\alpha) + \tau_{xy}\sin(\alpha) = 0. \qquad (43)$$

Рассмотрим первое уравнение системы (43). Подставляя в него функции из (42), получаем:

$$\gamma y \sin(\alpha) - (-2B+\gamma) y \,\text{ctg}(\alpha)\cos(\alpha) = 0,$$

откуда получаем, что

$$B = -\frac{\gamma}{2}(\text{tg}^2(\alpha) - 1). \qquad (44)$$

Далее рассмотрим второе уравнение системы (43). Подставляя в него функции из (42), получаем:

$$-2Ay\,\text{ctg}(\alpha)\cos(\alpha) + y(2B-\gamma)\cos(\alpha) -$$
$$-y(-2B+\gamma)\,\text{ctg}(\alpha)\sin(\alpha) = 0,$$

откуда с учетом (44) получаем, что

$$A = -\gamma\,\text{tg}^3(\alpha). \qquad (45)$$

По (41) и (44) определяем, что

$$B = -\frac{\gamma}{2}(\text{tg}^2(\alpha) - 1),$$
$$C = \frac{\gamma}{2}\text{tg}^3(\alpha),$$
$$D = \frac{\gamma}{4}(1 + 3\,\text{tg}^2(\alpha)). \qquad (46)$$

Подставляя (45) и (46) в (26), получаем:

$$\sigma_x = \gamma y,$$
$$\sigma_y = -2x\gamma\,\text{tg}^3(\alpha) - y\gamma\,\text{tg}^2(\alpha),$$
$$\tau_{xy} = x\gamma\,\text{tg}^2(\alpha).$$

Сравнение данных результатов с классическими показало их полное совпадение.

Вывод

Показано, что в отличие от классической постановки плоской задачи теории упругости в случае заданных на границе напряжений, модифицированная постановка позволяет разделить (для каждой из двух искомых функций) процедуру определения решения, удовлетворяющего уравнению равновесия в области и граничным условиям типа Коши на контуре. Метод проиллюстрирован на аналитических решениях плоских задач. Результаты показали полное совпадение с решениями, полученными с помощью классического метода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ляв А. Математическая теория упругости. – М.: ОНТИ НКТП СССР, 1935. – 674 с.
2. Кац А.М. Теория упругости. – СПб.: Лань, 2002. – 208 с.
3. Розин Л.А. Задачи теории упругости и численные методы их решения. – СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1998. – 532 с.
4. Жемочкин Б.Н. Теория упругости. – М.: Госстройиздат, 1957. – 256 с.
5. Светашков А.А., Махов А.В. Формулировка уравнений двумерной теории упругости в виде краевой задачи для системы Коши-Римана // Известия Томского политехнического университета. – 2005. – Т. 308. – № 6. – С. 136–140.
6. Светашков А.А. О приведении системы дифференциальных уравнений пространственной теории упругости к диагональному виду // Известия вузов. Физика. – 2005. – № 11. – С. 116–120.